В.В.Суворов

СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ АКСИОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРКУБОВЫХ СТРУКТУР

Abstract. *We consider a method for logical analysis based on geometric interpretation of propositional formulas. A logical formula is represented as a unit hypercube in an orthogonal basis of dimension equal to the locality of the formula. It is shown that the analysis of cube intersections in accordance with simple visual criteria allows one to formulate logical axioms. The possibility to construct programming tools for estimating the truth of formulas according to visual perceptions is discussed.*

Введение

Одним из главных направлений повышения эффективности компьютерных технологий для решения задач в проблемных постановках является визуализация информации и применение приемов остенсивного выбора и преобразования объектов, путем непосредственного указания на них, например, с помощью "курсора мыши". Зрительное восприятие высокоинформативных объектов сопровождается интеграцией большого количества атрибутов в целостный образ, оцениваемый по интегральным критериям естественного интеллекта. Такие оценки оказываются эффективными, в частности, там, где теоретические расчеты затруднены ввиду большой сложности или дефицита информации. Прямой, не опосредствованный логикой доступ к информации, актуальное нахождение в едином поле зрения многих компонентов, определяющих решение, приводят к эффективному синтезу решения в форме "узрения" результата. Примерами элементарных действий такого рода являются: визуальное различение скрещивающихся и пересекающихся прямых, или, что имеет прямое отношение к решаемой задаче, фиксация факта прохождения секущей плоскости через помеченные вершины пространственной решетки. Соответствующие приемы зрительного мышления, реализованные в вычислительной среде, приобретают значение интеллектуальных инструментов. Построение подобных инструментов может идти по двум направлениям: создание структур, аналогичных нейросетевым, со специальной методологией "обучения", и программная эмуляция методов пространственного анализа.

Настоящая работа посвящена реализации в вычислительной среде интеллектуальных приемов зрительного мышления для решения задач математической логики. Рассматривается геометрическая интерпретация пропозициональных формул. Показывается, что построение тождественно истинных формул для пропозициональных форм фиксированной структуры, а также оценка истинности произвольных формул может быть выполнена в результате актов зрительной оценки с опорой на такие базовые свойства зрения, как: а) прямой доступ к высокоинформативным объектам, б) единовременное представление в поле зрения совокупности сложных компонентов, из которых должно следовать решение; в) непосредственное приложение к сложным информационным объектам интегральных, также интуитивных критериев содержательной оценки.

Описание подхода

Фундаментальный подход к установлению взаимосвязи между алгебраическими и геометрическими способами представления математических объектов изложен в [1]. Исследованию свойств гиперкуба в качестве пространства представления для математических объектов различной природы, также для формул математической логики посвящены работы [2, 3, 4 и др.], известны другие подходы к геометризации логических объектов [например, 5]. Особенность излагаемого способа геометрической интерпретации состоит в следующем:

- логическая формула рассматривается в двух относительно независимых аспектах: с точки зрения структуры формулы (скобочной и операторной) и с точки зрения взаимозависимости входящих в нее аргументов; каждый аспект специфически отражается на распределении истинностных значений результирующей формулы;
- геометрический образ формируется не непосредственно для конкретной формулы, но получается в результате выполнения сечения с выделением подпространства из пространства большей размерности; исходное пространство строится для пропозициональной формы, имеющей ту же операторную и скобочную структуру, что и анализируемая формула, но все аргументы которой являются независимыми переменными;
- исследование направлено на создание продуктивного метода и практического инструмента, приложимого как для работы с отдельными формулами, так и с системами аксиом;
- решается задача реализации приемов визуального мышления, характеризующихся высокой степенью интегрированности, в вычислительной среде в форме интеллектуальных орудий.

Геометрическая интерпретация формул математической логики основывается на введениие пространственных координат для аргументов формулы. На рис.1 показана геометрическая интерпретация для 16 функций, соответствующих различным распределениям значений функций от двух логических аргументов. В центре диаграмм обозначение функции, в частности, «|» – штрих Шеффера, «↓» – стрелка Пирса. Индекс в f_n соответствует естественной нумерации – равен увеличенному на единицу значению четырехразрядного двоичного числа, образованного значениями функции от комбинаций аргументов, расположенных в возрастающем порядке. Четыре точки в вершинах квадрата соответствуют значениям аргументов $x_1x_2 = \{00, 10, 01, 11\}$. Зачерненные точки означают, что при данных значениях аргументов (координат точки) значение функции равно '1', незачерненные – '0'.

Переходя от рассмотренных диаграмм к геометрической интерпретации формул, отметим, что геометрическое пространство формируется не для формул, а для пропозициональных форм, под которыми здесь понимаются определенного вида формальные объекты. Пусть имеется пропозициональная формула $F^n(x_1,\dots,x_k)$, где n – местность формулы, k – количество независимых аргументов $(k<n)$. Производится разотождествление аргументов во всех позициях формулы. Например, аксиома

$(((x_1\to 0)\to 0)\to x_1)$ [6] преобразуется в

$(((x_1\to x_2)\to x_3)\to x_4)$. В компьютерном представлении обозначения переменных опускаются и форма приобретает вид схемы – $(((*\to *)\to *)\to *)$.

Для n-местной формы Φ^n могут быть построены формулы $F_1,\dots, F_w$, имеющие идентичную скобочную структуру, но различающиеся зависимостями входящих в них аргументов. Более точное обозначение каждой такой формулы – $F_i^{n,k}$, где n – местность формулы, k – количество независимых аргументов, i – вариант отождествления переменных. Формула наиболее общего вида $F_0^{n,n} \equiv F_0^n$ имеет n независимых аргументов – $x_1,\dots,x_n$. В результате отождествления некоторых аргументов получаются формулы частного вида. Для каждой полученной формулы аргументы x_i и x_j в произвольно взятых i-й и j-й позициях формулы могут: а) быть независимыми переменными; б) находиться в прямой зависимости $x_i=x_j$; в) находиться в инверсной зависимости $x_i = \neg x_j$; кроме того г) каждый аргумент может отождествляться с логической константой – '1' или '0'. Каждое распределение значений аргументов есть двоичное число. Если в n-местной формуле все аргументы являются независимыми переменными, то любой двоичный n-разрядный код реализуется в качестве распределения значений аргументов формулы.

При геометрической интерпретации формулы каждому распределению аргументов соответствует точка в гиперпространстве размерности n. Значения аргументов соответствуют координатам точки. Индексация координатных осей соответствует порядку расположения аргументов в формуле F^n. При введении зависимостей для аргументов в формуле не реализуются коды, нарушающие введенные зависимости. Соответственно числу введенных зависимостей уменьшается фактическая размерность пространства, в которое может быть изоморфно отображена формула. Процесс отождествления аргументов сопровождается выделением в пространстве гиперплоскостей. Например, семиместная формула, имеющая четыре независимых аргумента, может быть изоморфно отображена в 4-мерное пространство. Представление формулы в семимерном пространстве позволяет, однако, отобразить не только зависимость от аргументов, но и структуру формулы.

Геометрическое представление логических функций

Как уже отмечалось, пространство представления формируется не для формул, а для соответствующих им пропозициональных форм. Геометрический образ формулы соответствует подпространству χ^k.пространства Ξ^n. На рис.2 приведены геометрические образы некоторых формул, полученных из пропозициональной формы – (((). Формула наиболее общего вида F0n графически совпадает с пропозициональной формой (n. Для формы ((() формула F02 изображается полной четырехточечной диаграммой.

На рис.2:

- диагональ $x_2=x_1$ означает прямую зависимость второго аргумента от первого; подстановка $x2=x1$ в исходную формулу дает $x_1 \to x_1$;
- диагональ $x_2=\neg x_1$ означает инверсную зависимость второго аргумента от первого; подстановка $x_2=\neg x_1$ в исходную формулу дает $(x_1 \to \neg x_1)$;
- сторона квадрата $x_2=0$ соответствует $(x_1 \to x_0)$;
- взятие точки $x_1=1$, $x_2=0$ дает $(1 \to 0)$.

Аналогичным образом строятся другие графики и соответствующие им формулы.

Геометрический способ получения тавтологий

Пространством для структуры формулы с тремя аргументами является трехмерный единичный куб. На рис.3 приведены диаграммы для формул $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$ и $(x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3$.

Для рассмотрения трехмерных диаграмм обратимся, например, к формуле ($x_1 \rightarrow$(x2(x3)). На рис.4 приведены графический образ исходной формулы и построенные различным образом сечения для тавтологий: двумерные (плоские), одномерные (линейные) и нульмерные (точки). В формулах под рисунками переменные x1, x2 и x3 переобозначены через x, y и z; кроме того, выполнены подстановки в соответствии с зависимостями аргументов:

(x((y(z)) – три независимых аргумента;

(x((y(y)) – заштрихованное сечение, прямая зависимость x3=x2;

(x(((x(y)) – заштрихованное сечение, инверсная зависимость x2=(x1;

(x((0(y)) – заштрихованное сечение, x2=0;

$(x \rightarrow (x \rightarrow x))$ – соответствует x3=x2=x1;

$(x \rightarrow (\neg x \rightarrow x))$ – соответствует $x2=\neg x1$, x3=x1;

$(0 \rightarrow (x \rightarrow \neg x))$ – соответствует x1=0, $x3=\neg x2$;

(0((0(1)) – соответствует x1=0; x2=0; x3=1.

Формирование тавтологии означает в геометрической интерпретации построение сечения, не имеющего пересечений с 0-вершинами. Основным результатом проведенного рассмотрения является демонстрация того факта, что заключение на основе визуального анализа имеет результатом построение логической тавтологии. Все приведенные выше тавтологии получены путем выбора секущих плоскостей, граней, отрезков, соединяющих вершины, либо путем выбора самих вершин по единственному критерию отсутствия в них 0-вершин. В данном примере диаграмма для функции (x((y(z)) имеет значение 0 (незачерненный кружок) в точке (1, 1, 0).

Примеры для системы аксиом

Приводимый ниже пример иллюстрирует четырех- и пятимерные геометрические объекты, которые соответствуют четырех- и пятиместным пропозициональным формам. На рис.5 базовая система ортов обозначена полужирным символом 0, штрихом помечены локальные системы для четвертого измерения, индексом 1 отмечены подбазисы для пятого измерения.

В качестве примера возьмем первые две аксиомы из импликативной аксиоматики Лукасевича[7] : CCCxyzCNxz, CCCxyzCyz, CCNxzCCyzCCxyz. Переходя от польской записи к классической и к используемым обозначениям аргументов, получаем две формулы:

(((x1(x2)(x3)(((x1(x3)),

$$(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to (x_2 \to x_3)).$$

Аксиомы имеют одинаковую скобочную структуру. Разметку вершин выполняем для пропозициональной формы –

$$(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to (x_4 \to x_5)),$$

компьютерное представление –

(((((() (() ((((()),

С учетом отождествлений x4(x1, x5=x3 для первой формулы и x4=x2, x5=x3 – для второй получаем вершины, в которых функции имеют значение '1' и строим сечение.

На рис.5 приведены диаграммы для функций. Отмечены только запрещенные вершины (светлые кружочки), т.е. те, для которых значение формы равно ~0. В математическом представлении полученные фигуры – два по-разному расположенных трехмерных куба в одной и той же координатной сетке. На рисунке кубы трансформировались в параллелепипеды с заштрихованными верхними и нижними гранями и утолщенными линиями, соединяющими выбранные вершины. Как и ранее, введены обозначения x, y и z для переменных x_1, x_2 и x_3.

Теоретические обобщения

Не приводя доказательств, сформулируем положения, фиксирующие связь формального и геометрического представлений.

Лемма 1. Для произвольной формулы F^k от независимых аргументов $x_1,...,x_k$, полученной из пропозициональной формы $Ф^n$ в результате отождествления некоторых из ее аргументов $x_1,...,x_n$, $(k<n)$, реализуется множество распределений аргументов, соответствующее множеству $S(F^k)$ всех точек некоторого подпространства χ^k

пространства Ξ^n. В другой формулировке леммы – множество точек $S(F^k)$, составляющих образ формулы F^k, не может быть расположено в пространстве произвольным образом, но с необходимостью образует подпространство χ^k.

Лемма 2. Любое сечение χ^k пространства Ξ^n со структурой гиперкуба, полученное в результате введения зависимостей между некоторыми пространственными координатами, получает в формальном представлении вид формулы F^k с зависимостями для аргументов, соответствующими введенным зависимостям пространственных координат.

Лемма 3. Множество всех подпространств $\{ \chi^i \mid i \in I\}$, где I – множество индексов для зависимостей пространственных координат, изоморфно множеству всех формул $\{F^i\}$, которые могут быть получены из пропозициональной формы Φ^n путем отождествления некоторых или всех аргументов.

Теорема. Множество всех тавтологий $\{T_i\}$, которые могут быть получены из пропозициональной формы Φ^n в результате всех различных вариантов отождествления аргументов, изоморфно множеству подпространств в форме сечений $\{ \chi^i \mid i \in I\}$, проходящих через точки пространства Ξ^n, в которых формула F_0^n, графически совпадающая с Φ^n, имеет значение 1.

В дальнейших исследованиях нуждается вопрос о совместном геометрическом представлении совокупностей тавтологий в качестве систем аксиом. Интерес представляет установление геометрических свойств формул, выводимых в конструктивных логиках с различной аксиоматикой. Например, при наличии инверсий (отрицаний для некоторых аргументов) соответствующее сечение может не проходить через начало координат. С введением метрики можно говорить об удаленности сечения от начала координат, в зависимости от того, как именно в системе аксиом представлено отрицание.

Для автоматического формирования тавтологий составлен алгоритм, моделирующий построение сечения по визуальным критериям. Например, при обработке пропозициональной формы для аксиомы импликативного исчисления с одной аксиомой [7]

$$(((x_1\to x_2)\to x_3)\to((x_3\to x_1)\,((x4(x1))),$$

получен список тавтологий, из которого представляет интерес, например, тавтология

(((x1(x2)(x3)(((x3(x4)((x2(x4)))

которая, в свою очередь, может быть принята в качестве аксиомы одноаксиомного импликативного исчисления.

Заключение

Предлагаемая геометрическая интерпретация пропозициональных формул позволяет оценивать истинностные свойства пропозициональных формул по критериям, которые естественным образом присущи зрительному восприятию, т.е. без обращения к дедуктивному или модельному методам. Получение тавтологий (потенциальных аксиом) из пропозициональной формы превращается из процесса вывода или оценивания в действие выбора сечения через вершины геометрической фигуры. Выполнение сечения означает в формальном представлении отождествление некоторых переменных с другими переменными формулы в прямой или инверсной зависимости либо подстановку констант '0' или '1'.

Описываемый подход может применяться для интерактивных процедур при обучении и в исследовательской работе. Критерии визуального анализа могут быть смоделированы в вычислительной среде. Оптимальной средой для аппаратной реализации метода является дискретная многослойная микрокристаллическая среда, подобная нейросетевой, но со специальной методологией "обучения".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
2. *Deza M., Laurent M.* Isometric hypercube embedding of generalized bipartite metrics // Discrete Applied Mathematics, 56, 1995, 215–230.
3. *Deza M., Grishukin V.* Hypermetric two-distance spaces // J.Combin. Inform. System Sci. 25 (2000) 89–132.
4. *Cox J.L.* Digital Morse Theory With Suggested Applications. City University of New York Department of Computer Science CUNY Graduate Center . URL: http://www.casi.net/D.DMT/D.Overview/AcademicPressPaper14-03/index.html
5. *Bryant R.E.* Symbolic Boolean manipulation with ordered binary-decision diagrams // ACM Computing Surveys. V.24, 3, 1992.
6. *Новиков П.С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977.
7. *Домбровский Б.Т.* Львовско-варшавская философская школа. URL: http://www.philosophy.ru/library/dombrovski.
8. Философия и логика Львовско-Варшавской Школы. М.: РОССПЭН, 1999.

РИСУНКИ К СТАТЬЕ

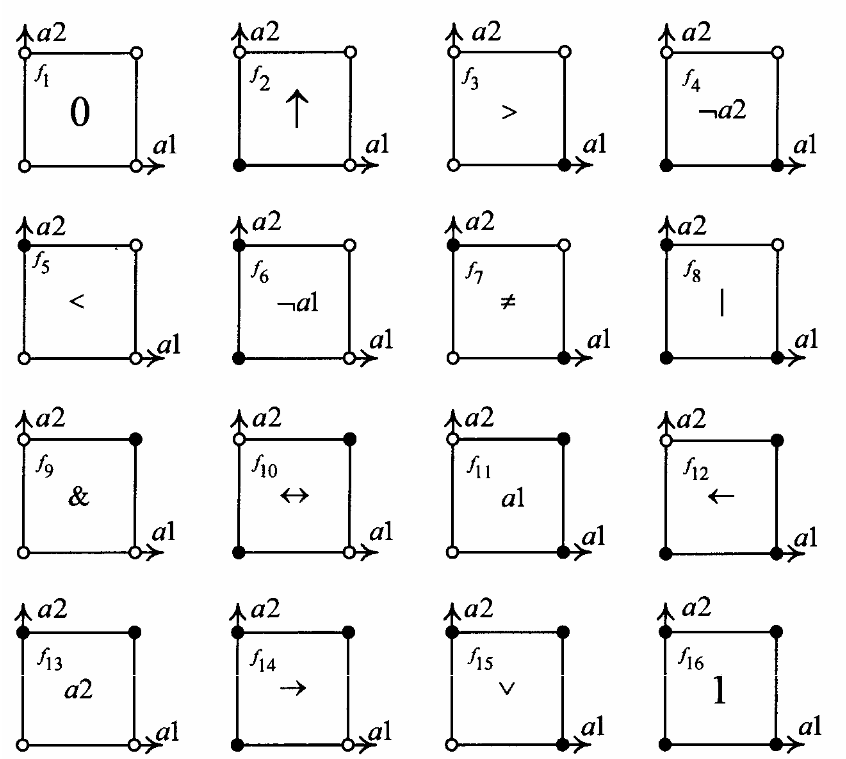

Рис.1. Изображение логических функций на координатной плоскости

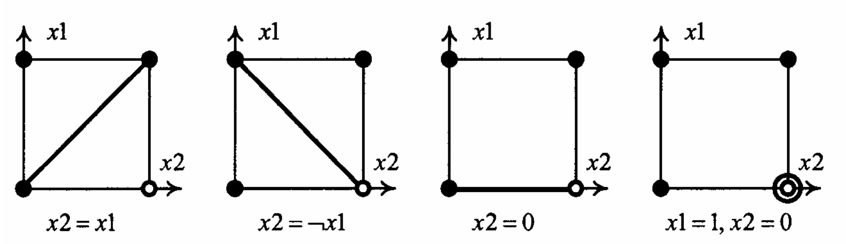

Рис.2. Графики логических формул

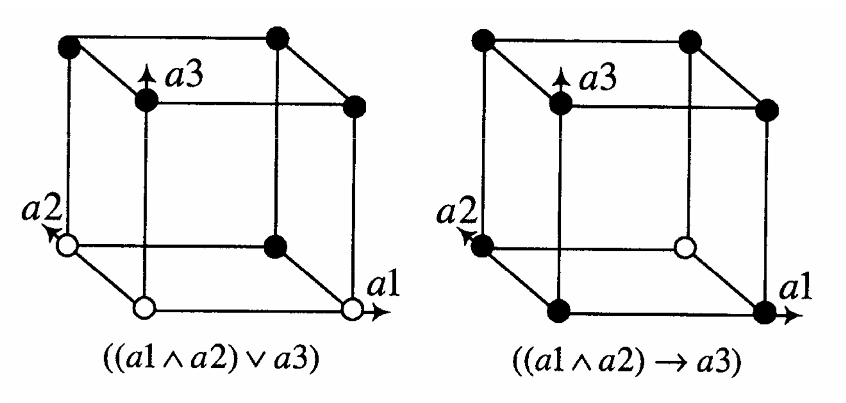

Рис.3. Трехкоординатные логические формулы

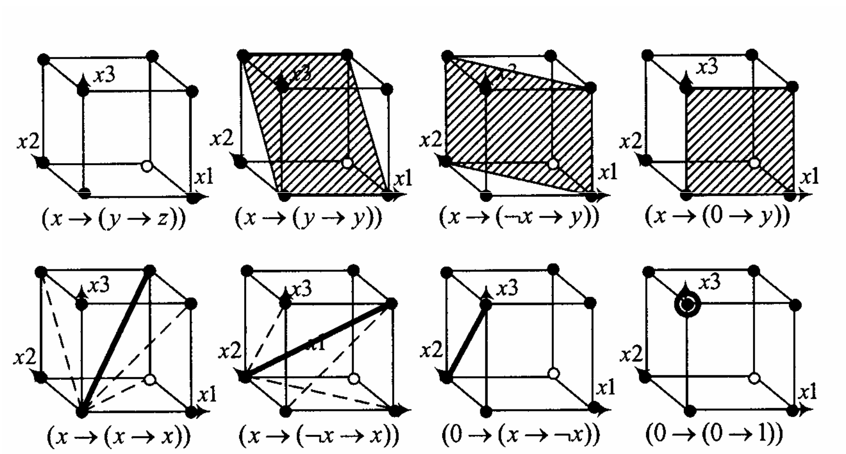

Рис.4. Геометрическое построение логических тавтологий

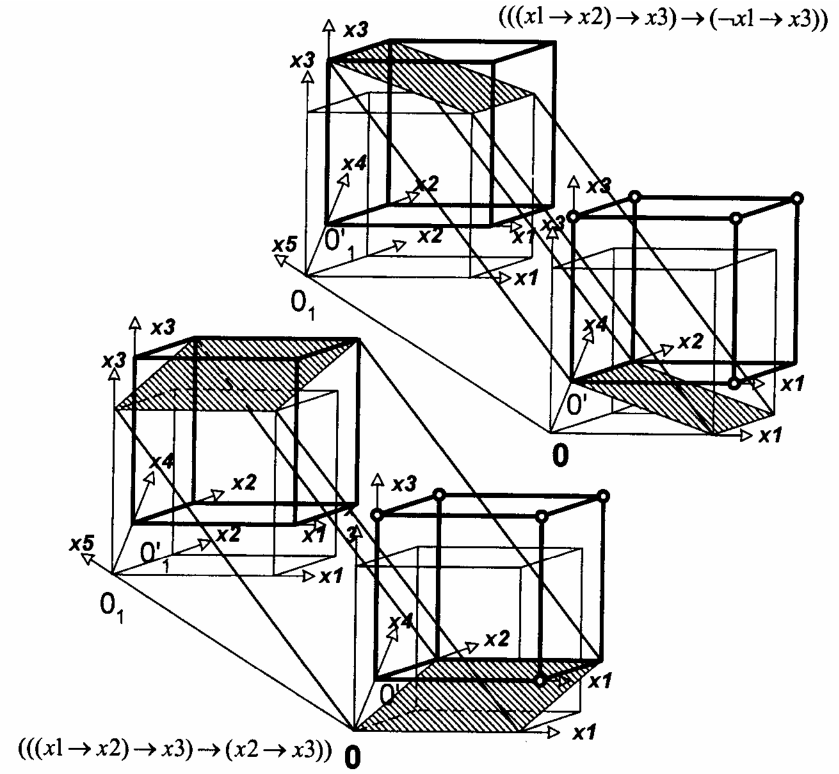

Рис.5. Диаграммы для аксиом