И.А.Карпенко

ПОГРУЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В НЕКОТОРЫЕ ПАРАЛОГИКИ

Abstract. *The classic propositional calculus PC is embedded into several paralogics by different embedding operations, which are constructed.*

Посредством описываемых ниже операций классическое пропозициональное исчисление из [1, с.49], обозначаемое PC, погружается в исчисления I_0, I_1, I_2, I_3 из [2], MAP из [3] и LAP из [4]. При этом погружение исчисления PC в исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3 осуществляется посредством двух различных операций.

Язык *L* этих исчислений есть стандартно определяемый пропозициональный язык с алфавитом $<S, \&, \vee, \supset, \neg,), (>$, где S есть множество $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка λ, $\supset$, $\wedge$, $\vee$ есть бинарные логические связки, $\neg$ есть унарная логическая связка,) и (есть технические символы (скобки). При записи формул в языке *L* принимаются обычные соглашения об опускании скобок, вместо "формула в языке *L*" будем писать "формула". Далее буквы A, B, C и D используются для обозначения формул.

Все упомянутые выше исчисления являются исчислениями гильбертовского типа со стандартно определяемым понятием доказательства. Множеству всех правил вывода каждого из этих исчисленияй принадлежит только одно правило: A, $A\supset B/B$. Поэтому для задания любого из этих исчислений достаточно определить множество всех его аксиом.

Исчисление PC. Множество всех аксиом исчисления PC есть множество всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1. $A\supset(B\supset A)$,
2. $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$,
3. $(A\wedge B)\supset A$,
4. $(A\wedge B)\supset B$,
5. $A\supset(B\supset(A\wedge B))$,
6. $A\supset(A\vee B)$,
7. $B\supset(A\vee B)$,

8. $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset((A\vee B)\supset C))$,

9. $(A\supset B)\supset((A\supset(\neg B))\supset(\neg A))$,

10. $(\neg(\neg A))\supset A$.

Исчисления I_0, I_1, I_2 и I_3. Множество всех аксиом исчисления I_0 есть объединение множества всех акисом исчисления PC, не содержащих $\neg$, с множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

1\`. $(\neg(D\supset D))\supset B$,

2\`. $(A\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg A)$,

3\`. $(A\supset B)\supset((B\supset(\neg A))\supset(\neg A))$,

4\`. $A\supset((\neg A)\supset(\neg(B\supset B)))$,

5\`. $((B\supset A)\supset A)\supset((\neg A)\supset B)$, где A не является пропозициональной переменной.

Множество всех аксиом исчисления I_1 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 2\` и 3\` на схемы

2\`\`. $(D\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg D)$ и

3\`\`. $(D\supset B)\supset((B\supset(\neg D))\supset(\neg D))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_2 получаем из множества всех аксиом исчисления I_0 за счет замены схем 4\` и 5\` на схемы

4\`\`. $D\supset((\neg D)\supset(\neg(B\supset B)))$ и

5\`\`. $((B\supset D)\supset D)\supset((\neg D)\supset B))$ соответственно.

Множество всех аксиом исчисления I_3 есть объеденение множества всех аксиом исчисления I_0 с множеством всех формул вида:

6\`. $A\supset((\neg A)\supset((B\supset(\neg B))\supset(\neg B)))$.

Исчисление MAP. Множество всех аксиом исчисления MAP есть объединение множества всех акисом исчисления PC, не содержащих $\neg$, с множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

M1. $(\neg(A\supset A))\supset B$,

M2. $(A\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg A)$,

M3. $(A\supset B)\supset((B\supset(\neg A))\supset(\neg A))$,

M4. $A\supset((\neg A)\supset(\neg(B\supset B)))$,

M5. $((B\supset A)\supset A)\supset((\neg A)\supset B)$;

M6. $(\neg(\neg A))\supset A$, M7.$A\supset(\neg(\neg A))$, при этом в схемах M4 и M5 A не является квазиэлементарной формулой[1].

---

[1] Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\wedge,\vee,\supset$.

Исчисление LAP. Множество всех аксиом исчисления MAP есть объединение множества всех акисом исчисления PC, не содержащих $\neg$, с множеством всех формул, каждая из которых имеет хотя бы один из следующих видов:

L1. $(\neg(A\supset A))\supset B$,

L2. $(A\supset(\neg(B\supset B)))\supset(\neg A)$,

L3. $(A\supset B)\supset((B\supset(\neg A))\supset(\neg A))$,

L4. $A\supset((\neg A)\supset(\neg(B\supset B)))$,

L5. $((B\supset A)\supset A)\supset((\neg A)\supset B)$;

L6. $(\neg(\neg A))\supset A$, M7.$A\supset(\neg(\neg A))$, при этом в схемах M2 и M3 A не является квазиэлементарной формулой.

Используя тот факт, что все рассматриваемые здесь логики[2], соответствующие исчислениям I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP, являются конечнозначными, нетрудно доказать, что они являются паралогиками в том смысле, что каждая из них паранепротиворечива[3] или параполна[4]. Например, подробное доказательство того, что логика I_2 является параполной, дано в [5, с.61-62]. Можно доказать, что логика I_0 является паранепротиворечивой и параполной; логика I_1 является паранепротиворечивой, не не является параполной; логика I_2 является параполной, но не является паранепротиворечивой; логика I_3 является паранепротиворечивой и параполной; логика MAP является паранепротиворечивой, но не является параполной; логика LAP является параполной, не не является паранепротиворечивой.

Определим унарные операции h_φ (см. [3, с.496]), ψ и χ на множестве всех формул.

Определение операции h_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(2) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i\supset\varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i)\supset s_i$ принадлежат логике PC.

---

[2] Логикой, соответствующей данному исчислению, называется множество всех теорем этого исчисления.

[3] Логика L называется паранепротиворечивой, если существует противоречивая L-теория, которая не равна множеству всех формул.

[4] Логика L называется параполной, если существует такая L-теория T, что T не является полной L-теорией и всякая полная теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Тогда

$h_\varphi(s_i)=\varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$h_\varphi(A\bullet B)=h_\varphi(A)\bullet h_\varphi(B)$, где $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$h_\varphi(\neg A)=\neg h_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции ψ:

$\psi(s_i) = \neg s_i$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$\psi(A\bullet B) = \psi(A)\bullet\psi(B)$, где $\bullet\in\{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции χ:

$\chi(s_i) = s_i$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$\chi(A\bullet B) = \chi(A)\bullet\chi(B)$, где $\bullet\in\{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\chi(\neg A) = \chi(A)\supset(\neg(s_1\supset s_1))$, где A произвольная формула.

Теорема 1 (о погружении исчисления PC в исчисления I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP): для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. E $\vdash h_\varphi(\alpha)$.

Теорема 2 (о погружении исчисления PC в исчисление I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$): для всякого i из $\{0,1,2,3\}$ и всякой формулы α верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. $I_i \vdash \psi(\alpha)$.

Теорема 3 (о погружении исчисления PC в исчисления I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP): для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ и всякой формулы α верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. E $\vdash \chi(\alpha)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать следующие утверждение 1 и утверждение 2.

Утверждение 1: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что если PC $\vdash \alpha$, то E $\vdash h_\varphi(\alpha)$.

Утверждение 2: для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что если E $\vdash h_\varphi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство утверждения 1 проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения 2 предпосылается следующая лемма 1.

Лемма 1: для всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ, верно, что PC $\vdash \alpha \supset h_\varphi(\alpha)$ и PC $\vdash h_\varphi(\alpha) \supset \alpha$.

Доказательство проводится индукцией по построению формулы α.

Докажем утверждение 2.

(1) E $\vdash h_\varphi(\alpha)$ (условие),

(2) PC $\vdash h_\varphi(\alpha)$ (из (1) по лемме 1),

(3) PC $\vdash \alpha$ (из (2) и леммы 1 по определению доказательства в PC).

Утверждение 2 доказано.

Из утверждений 1 и 2 получаем теорему 1. Таким образом теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующие утверждение 3 и утверждение 4.

Утверждение 3: для всякого i из {0,1,2,3} и всякой формулы α верно, что если PC $\vdash \alpha$, то $I_i \vdash \psi(\alpha)$.

Утверждение 4: для всякого i из {0,1,2,3} и всякой формулы α верно, что если $I_i \vdash \psi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство утверждения 3 проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения 4 предпосылаются лемма 2, лемма 3 и лемма 4.

Лемма 2: для всякого i из {0,1,2,3} и всякой формулы α верно, что если $I_i \vdash \alpha$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство леммы 2 проводится возвратной индукцией по длине доказательства в исчислении I_i ($i \in \{0,1,2,3\}$) формулы α.

Доказательство нижеследующей леммы 3 имеет семантический характер, поэтому нам потребуются определения некоторых семантических понятий. Оценкой назовем любое отображение множества $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных в $\{0, 1\}$. Оценку $\nu`$ назовем обратной к оценке ν, если для всякой пропозициональной переменной s_i верно, что

$$\nu`(s_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } \nu(s_i) = 0, \\ 0, \text{ если } \nu(s_i) = 1. \end{cases}$$

Означиванием при оценке ν назовем отображение $|\ |\nu$ множества всех формул в {0, 1}, удовлетворяющее следующим условиям для всякой пропозициональной переменной s_i и всяких формул A и B:

1) $|s_i|\nu = \nu(s_i)$,
2) $|A \supset B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$ или $|B|\nu = 1$,

3) $|A \wedge B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ и $|B|\nu = 1$,
4) $|A \vee B|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 1$ или $|B|\nu = 1$,
5) $|\neg A|\nu = 1$ т.т.т. $|A|\nu = 0$.

Лемма 3: для всякой оценки ν и всякой формулы α верно, что $|\alpha|\nu = |\psi(\alpha)|\nu`$.

Доказательство леммы 3 проводится индукцией по построению формулы α.

Лемма 4: для всякой формулы α верно, что если PC $\vdash \psi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство легко проводится методом от противного:

(1) PC $\vdash \psi(\alpha)$ (условие),
(2) PC $\vdash \alpha$ (допущение),
(3) $|\alpha|\nu = 0$ (из (2) по теореме о полноте для PC),
(4) $|\psi(\alpha)|\nu` = 0$ (из (3) по лемме 3),
(5) PC $\vdash \psi(\alpha)$ (из (4) по теореме о непротиворечивости PC),
(6) PC $\vdash \alpha$ (противоречие (1) и (5)).

Лемма 4 доказана.

Докажем утверждение 4.

(1) $I_i \vdash \psi(\alpha)$ (условие),
(2) PC $\vdash \psi(\alpha)$ (из (1) и леммы 2),
(3) PC $\vdash \alpha$ (из (2) и леммы 4).

Утверждение 4 доказано.

Из утверждений 3 и 4 получаем теорему 2. Таким образом, теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать следующие утверждение 5 и утверждение 6.

Утверждение 5: для всякого исчисления E из {I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP} и всякой формулы α верно, что если PC $\vdash \alpha$, то E $\vdash \chi(\alpha)$.

Утверждение 6: для всякого исчисления E из {I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP} и всякой формулы α верно, что если E $\vdash \chi(\alpha)$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство утверждения 5 проводится возвратной индукцией по длине PC-доказательства формулы α.

Доказательству утверждения 6 предпосылаются леммы 5 и 6.

Лемма 5: для всякого исчисления E из {I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP} и для всякой формулы α верно, что если E $\vdash \alpha$, то PC $\vdash \alpha$.

Доказательство леммы 5 проводится возвратной индукцией по длине доказательства в исчислении E (E $\in$ {I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP}) формулы α.

Лемма 6: для всякой формулы α верно, что PC $\vdash \alpha \supset \chi(\alpha)$ и PC $\vdash \chi(\alpha) \supset \alpha$.

Доказательство проводится возвратной индукцией по построению формулы α.

Но основе леммы 5 и леммы 6 доказывается утверждение 6:

(1) $E \vdash \chi(\alpha)$ (условие),

(2) $PC \vdash \chi(\alpha)$ (из (1) по лемме 5),

(3) $PC \vdash \alpha$ (из (2) и леммы 6 по определению доказательства в PC).

Утверждение 6 доказано.

Из утверждений 5 и 6 получаем теорему 3. Таким образом, теорема 3 доказана.

Посредством описываемых ниже операций классическая пропозициональная логика высказываний погружается в коньюнктивно-негативный, дизьюнктивно-негативный и импликативно-негативный фрагменты рассмотренных выше паралогик.

Для всякого исчисления E из $\{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$ обозначим посредством $E_{\wedge\neg}$ коньюнктивно-негативный фрагмент исчисления E, посредством $E_{\vee\neg}$ – дизьюнктивно-негативный фрагмент исчисления E, посредством $E_{\supset\neg}$ – импликативно-негативный. Таким образом, $E_{\wedge\neg}$ является множеством всех таких формул, каждая из которых доказуема в E ($E \in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) и ни одна из которых не содержит вхождений логических связок $\vee$ и $\supset$, $E_{\vee\neg}$ является множеством всех таких формул, каждая из которых доказуема в E ($E \in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) и ни одна из которых не содержит вхождений логических связок $\wedge$ и $\supset$, а $E_{\supset\neg}$ является множеством всех таких формул, каждая из которых доказуема в E ($E \in \{I_0, I_1, I_2, I_3$, MAP и LAP$\}$) и ни одна из которых не содержит вхождений логических связок $\wedge$ и $\vee$.

Определение операции c_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(3) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(4) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i \supset \varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i) \supset s_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$c_\varphi(s_i) = \varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$c_\varphi(A \wedge B) = c_\varphi(A) \wedge c_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$c_\varphi(A \vee B) = \neg((\neg c_\varphi(A)) \wedge (\neg c_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$c_\varphi(A \supset B) = \neg(c_\varphi(A) \wedge (\neg c_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$c_\varphi(\neg A) = \neg c_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции d_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(5) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(6) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i \supset \varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i) \supset s_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$d_\varphi(s_i)=\varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$d_\varphi(A \wedge B)=\neg((\neg d_\varphi(A)) \vee (\neg d_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$d_\varphi(A \vee B)=d_\varphi(A) \vee d_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$d_\varphi(A \supset B)=(\neg d_\varphi(A)) \vee d_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$d_\varphi(\neg A)=\neg d_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции i_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(7) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i,

(8) для всякой пропозициональной переменной s_i формулы $s_i \supset \varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i) \supset s_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$i_\varphi(s_i)=\varphi(s_i)$ для всякой пропозициональной переменной s_i,

$i_\varphi(A \wedge B)=\neg(i_\varphi(A) \supset (\neg i_\varphi(B)))$, где A и B произвольные формулы,

$i_\varphi(A \vee B)=(\neg i_\varphi(A)) \supset i_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$i_\varphi(A \supset B)=i_\varphi(A) \supset i_\varphi(B)$, где A и B произвольные формулы,

$i_\varphi(\neg A)=\neg i_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Теорема 4: для всякого исчисления $E_{\wedge\neg}$ из $\{I_{0\wedge\neg}$, $I_{1\wedge\neg}$, $I_{2\wedge\neg}$, $I_{3\wedge\neg}$, $MAP_{\wedge\neg}$ и $LAP_{\wedge\neg}\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции c_φ, верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. $c_\varphi(\alpha) \in E_{\wedge\neg}$.

Теорема 5: для всякого исчисления $E_{\vee\neg}$ из $\{I_{0\vee\neg}$, $I_{1\vee\neg}$, $I_{2\vee\neg}$, $I_{3\vee\neg}$, $MAP_{\vee\neg}$ и $LAP_{\vee\neg}\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции d_φ, верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. $d_\varphi(\alpha) \in E_{\vee\neg}$.

Теорема 6: для всякого исчисления $E_{\supset\neg}$ из $\{I_{0\supset\neg}$, $I_{1\supset\neg}$, $I_{2\supset\neg}$, $I_{3\supset\neg}$, $MAP_{\supset\neg}$ и $LAP_{\supset\neg}\}$, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции i_φ, верно, что PC $\vdash \alpha$ т.т.т. $i_\varphi(\alpha) \in E_{\supset\neg}$.

Теоремы 4, 5 и 6 легко получить из теоремы 1, используя известные бинарные тождества классической логики, позволяющие взаимовыражать связки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
2. *Popov V.M.* On the Logics Related to A.Arruda`s System V1 // Logic and Logical Philosophy. 1999. Vol.7. P. 87-90.
3. *Попов В.М.* Об одной трехзначной паранепротиворечивой логике // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. СПб., 2002.
4. *Попов В.М.* Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования. Вып.9. М.: Наука, 2002.
5. *Попов В.М.* Об одной параполной логике // Смирновские чтения. 3 международная конференция. М.: ИФРАН, 2001.