А.М.Анисов

ОПРЕДЕЛЕННОСТИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *The article discusses the problem of argumentation modelling in the context of uncertainty by means of the classical first-order logics of predicates. It shows the existence of formulae that exclude the appearance of uncertainty situation.*

В работах [1] и [2] в рамках классической логики был введен оператор неопределенности «н». Кратко воспроизведем формальный ход рассуждений из этих работ. Пусть T – аксиоматическая теория в языке L классического исчисления предикатов первого порядка. Сопоставим каждому n-местному атомарному предикатному символу $P(x_1, ..., x_n)$ языка L n-местный атомарный предикатный символ $P^*(x_1, ..., x_n)$, а каждому n-местному функциональному символу $t(x_1, ..., x_n)$ – n-местный функциональный символ $t^*(x_1, ..., x_n)$. Индивидные константы (если они вообще имеются) оставим без изменений. Получим язык L*. Теперь заменим в аксиомах и правилах вывода теории T каждое вхождение предикатных и функциональных символов на соответствующие символы со звездочкой. Результат описанной замены для аксиомы A обозначим через A*. В итоге получим теорию T* в языке L*, содержащую в качестве аксиом только формулы вида A*.

Объединим полученные теории в одну. Получим теорию $T \cup T^*$ в языке $L \cup L^*$. Теория $T \cup T^*$ вряд ли может кого-то заинтересовать. Просто она содержит два параллельных ряда аксиом, отличающихся лишь наличием или отсутствием звездочек в их формулировках. Однако понятие формулы претерпело существенное изменение. Формулами теории $T \cup T^*$ отныне являются не только формулы языка L и формулы языка L* по отдельности, но и *смешанные* формулы, содержащие как символы без звездочек, так и символы со звездочками. Пусть A – какая-либо формула языка $L \cup L^*$. *Через* A* *обозначим результат одновременной замены в* A *каждого предикатного или функционального символа без звездочки на соответствующий символ со звездочкой, а каждого предикатного или функционального символа со звездочкой на соответствующий символ без звездочки*.

---

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 01-03-00300а.

Произвольные формулы A и A* будем называть ***сходными*** в теории T ∪ T*. Так определенная операция * на формулах обладает следующим очевидным свойством.

Предложение 1. Любая формула A графически совпадает с A**, но ни одна формула A не совпадает с A*.

Положим Lн = L ∪ L* ∪ {н}, где «н» – символ новой унарной логической связки.

Добавим к T ∪ T* важное определение. Точнее, схему определений. Для *любой* формулы A языка Lн аксиомой является следующая формула:

$$\mathbf{нA \leftrightarrow ((A \,\&\, \neg A^*) \vee (\neg A \,\&\, A^*))}. \qquad (н)$$

Содержательный смысл данной схемы аксиом состоит в утверждении неопределенности A. В частности, если A – формула языка L ∪ L* (это означает, что в A нет вхождений оператора «н»), то A неопределенна тогда и только тогда, когда она выполнена в модели теории T ∪ T*, а сходная с ней формула A* не выполнена в той же модели, или, наоборот, A не выполнена, но A* выполнена.

Теорию T ∪ T* с присоединенной схемой определений нA ↔ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)) в качестве новой аксиомной схемы назовем *минимальной теорией с неопределенностью* Tн в языке Lн. Короче, минимальная

Tн = T ∪ T* ∪ {нA ↔ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*))}.

Дальнейшее изложение развивает идеи из [1] и [2]. Нам понадобится также следующая система натурального вывода классической логики предикатов первого порядка из [3]: A ⇒ A (р); A, B ⇒ A&B (&в); A&B ⇒ A (&у1); A&B ⇒ B (&у2); A ⇒ A ∨ B (∨в1); B ⇒ A ∨ B (∨в2); Γ, A ⊢ C и Γ, B ⊢ C ⇒ Γ, (A ∨ B) ⊢ C (∨у); Γ, A ⊢ B ⇒ Γ ⊢ (A → B) (→в); A, (A → B) ⊢ B (→у); Γ, A ⊢ B и Γ, A ⊢ ¬B ⇒ Γ ⊢ ¬A (¬в); ¬¬A ⊢ A (¬у); $A_1, ..., A_n, \Psi_{n+1}, \ldots, \Psi_m$, A вывод ⇒ $A_1, ..., A_n$ ⊢ A (введение знака выводимости ⊢в); ⊢ A ⇒ A (удаление знака выводимости ⊢у); Γ ⊢ A(v) ⇒ Γ ⊢ ∀vA(v) (∀в); ∀vA(v) ⇒ A(t) (∀у); A(t) ⇒ ∃vA(v); ∃vA(v) ⇒ A(α) (∃у) (в правилах для кванторов v – индивидная переменная языка логики предикатов, t – терм, α – какое-либо новое имя, не входящее в исходный перечень имен языка).

Если T – пустая теория (не содержащая прикладных аксиом), то Tн есть множество формул в языке Lн, доказуемых в классической логике предикатов, плюс расширение, полученное за счет присоединения схемы нA ↔ ((A & ¬A*) ∨ (¬A & A*)). Символ «⊢» означает доказуемость в такой теории Tн, т.е. для доказуемой в Tн формулы A используется запись ⊢ A. Если T расширение Тн, то пишем Т $\vdash$ А для формулы А, доказуемой в Т. Отметим, что расширения минимальной теории с неопределенностью Тн могут быть произвольными. Но в контексте проблемы неопределенности важно соблюдать *принцип дублирования*:

Если к аксиоматической теории Т добавлена формула А в качестве новой аксиомы, то к Т в качестве аксиомы добавляется и формула А*.

Формулы, добавляемые к минимальной теории с неопределенностью Тн в качестве аксиом, могут иметь смешанный характер, т.е. содержать и символы без звездочки, и символы со звездочкой. В любом случае при соблюдении принципа дублирования требуется добавление смешанной формулы А сопровождать добавлением сходной формулы А*.

Назовем формулу А *абсолютно определенной*, если $\vdash$ ¬нА. Если Т – расширение теории Тн, то формулу А, для которой Т $\vdash$ ¬нА, назовем *абсолютно определенной в теории* Т. По аналогии можно было бы ввести понятие абсолютной неопределенности формул, для которых $\vdash$ нА, однако такое понятие было бы пустым, как показывает следующее утверждение.

Предложение 2. Не существует формулы А, для которой верно $\vdash$ нА.

Если бы было $\vdash$ нА, то было бы $\vdash$ ((А & ¬А*) ∨ (¬А & А*)). Устраним из ((А & ¬А*) ∨ (¬А & А*)) все вхождения оператора «н» (если таковые имеются), используя схему (н). Получим вместо А формулу В, а вместо А* формулу В*, причем В и В* – формулы классической логики предикатов. Ясно, что $\vdash$ ((В & ¬В*) ∨ (¬В & В*)), т.е. эта формула доказуема в классическом исчислении предикатов первого порядка. По теореме полноты она логически общезначима: $\models$ ((В & ¬В*) ∨ (¬В & В*)). Возьмем произвольную модель М = <U, J> (где U – непустое множество, а J – функция интерпретации) формулы ((В & ¬В*) ∨ (¬В & В*)). Определим функцию интерпретации J′. Для каждого предикатного символа P или функционального символа f без звездочки оставим прежнее значение J′(P) = J(P), J′(f) = J(f), а для каждого предикатного символа P* или функционального символа f* положим J′(P*) = J(P), J′(f*) = J(f). Получим структуру М′ = <U, J′>, которая является моделью формулы ((В & ¬В*) ∨ (¬В & В*)) (поскольку она общезначима) и в которой символы без звездочек и соответствующие символы со звездочками интерпретируются одинаково. Следовательно, формула В выполнена в М′ при приписывании v тогда и только тогда, когда В* выполнена в М′ при приписывании v.

Допустим, B выполнена в M' при приписывании v. Тогда выполнена и B^*, но $\neg B^*$ не выполнена и конъюнкция $(B \& \neg B^*)$ не выполнена. Формула $\neg B$ не выполнена, так что конъюнкция $(\neg B \& B^*)$ также не выполнена. Значит, дизъюнкция этих конъюнкций $((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$ не выполнена в M' при приписывании v в противоречии с предположением о ее общезначимости. Допустим теперь, что B не выполнена в M' при приписывании v. Тогда $(B \& \neg B^*)$ не выполнена и, так как B^* не выполнена, $(\neg B \& B^*)$ также не выполнена, что вновь противоречит предположению об общезначимости $((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$.

Таким образом, структура M' не является моделью формулы $((B \& \neg B^*) \vee (\neg B \& B^*))$, и эта формула не является логически общезначимой. Значит, она не доказуема в классическом исчислении предикатов. Отсюда не доказуема и формула $((A \& \neg A^*) \vee (\neg A \& A^*))$, т.е. формула нA, что и требовалось доказать.

Разумеется, полученный только что результат не отменяет возможности выводить в прикладных теориях (расширяющих исчисление предикатов принятием логически не общезначимых формул в качестве аксиом) формулы вида нA в качестве теорем.

Легко доказывается следующее утверждение.

Предложение 3. $\vdash$ (нA $\leftrightarrow$ нA*) и $\vdash$ (нA $\leftrightarrow$ н$\neg$A).

В самом деле, нA $\leftrightarrow ((A \& \neg A^*) \vee (\neg A \& A^*))$, а нA* $\leftrightarrow ((A^* \& \neg A^{**}) \vee (\neg A^* \& A^{**}))$. Поскольку, в силу предложения 1, A^{**} есть A, $((A^* \& \neg A^{**}) \vee (\neg A^* \& A^{**}))$ есть $((A^* \& \neg A) \vee (\neg A^* \& A))$. Классическая логика высказываний дает $\vdash ((A \& \neg A^*) \vee (\neg A \& A^*)) \leftrightarrow ((A^* \& \neg A) \vee (\neg A^* \& A))$, т.е. $\vdash$ (нA $\leftrightarrow$ нA*).

Вновь используя нA $\leftrightarrow ((A \& \neg A^*) \vee (\neg A \& A^*))$, распишем н$\neg$A: н$\neg$A $\leftrightarrow ((\neg A \& \neg\neg A^*) \vee (\neg\neg A \& \neg A^*)) \leftrightarrow ((\neg A \& A^*) \vee (A \& \neg A^*)) \leftrightarrow$ нA.

В общем случае эквивалентность вида $(A \leftrightarrow A^*)$ не доказуема. Более того, даже если A теорема теории T, т.е. $T \vdash A$, то A^* не обязательно теорема этой теории. Однако в случае логически общезначимых формул имеет место следующий факт.

Предложение 4. $\vdash A \Leftrightarrow\ \vdash A^*$.

Доказательство основано на построении не имеющей прикладных аксиом минимальной теории с неопределенностью Тн. Это просто заданное в произвольном языке $L \cup L^* \cup$ {н} исчисление предикатов, дополненное схемой (н). Например, можно взять приведенную выше систему натурального вывода и пополнить ее аксиомной схемой (н). Применению прямого правила вывода вида (в линейной записи) $B_1, ..., B_n \Rightarrow C$ в доказательстве A преобразуется в шаг $B^*_1, ..., B^*_n \Rightarrow C^*$ в доказательстве A^*, поскольку правила вывода сформулированы для *любых* формул – в нашем случае, для *любых* формул языка $L \cup L^* \cup \{н\}$. Аналогичным образом преобразуются шаги применения правил косвенного вывода. Так же действуем и в случае применения схемы (н): схема формул $нA^* \leftrightarrow ((A^* \mathbin{\&} \neg A^{**}) \vee (\neg A^* \mathbin{\&} A^{**}))$ есть просто частный случай схемы $нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*))$, которой вместо формулы A (которая, заметим, может содержать символы со звездочкой) взята формула A* (которая может символов со звездочкой и не содержать – так будет в том случае, если все предикатные и функциональные символы, входящие в A, помечены звездочкой).

Впрочем, если аксиоматическое расширение T минимальной теории с неопределенностью Tн удовлетворяет принципу дублирования, то предложение 4 можно усилить.

Предложение 5. Если T дублированное расширение минимальной теории с неопределенностью Tн, то

$T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash A^*$.

Предложение 6. Если A доказуема, то как A, так и ¬A являются абсолютно определенными:

$\vdash A \Rightarrow \vdash \neg нA$ и $\vdash \neg н\neg A$.

Допустим, $\vdash A$ и нA. Из A получаем $\neg(\neg A \mathbin{\&} A^*)$. Так как $нA \leftrightarrow ((A \mathbin{\&} \neg A^*) \vee (\neg A \mathbin{\&} A^*))$, логика высказываний дает $(A \mathbin{\&} \neg A^*)$ и затем $\neg A^*$. Но по предложению 4 из $\vdash A$ вытекает $\vdash A^*$. Получили противоречие. Следовательно, $\vdash A \Rightarrow \vdash \neg нA$. Аналогично доказывается $\vdash A \Rightarrow \vdash \neg н\neg A$.

В системе натурального вывода из [3] доказательство последнего утверждения (при пропуске рутинных деталей) выглядит следующим образом.

1. $\vdash A$ — док.
2. $н\neg A$ — доп.
3. $н\neg A \leftrightarrow ((\neg A \mathbin{\&} \neg\neg A^*) \vee (\neg\neg A \mathbin{\&} \neg A^*))$ — акс. (н).
4. $((\neg A \mathbin{\&} A^*) \vee (A \mathbin{\&} \neg A^*))$ — 2, 3 лог.выск.
5. A — 1, $\vdash$у.
6. $\neg(\neg A \mathbin{\&} A^*)$ — 5, лог. выск.
7. $(A \mathbin{\&} \neg A^*)$ — 4, 6, лог. выск.
8. $\neg A^*$ — 7, &у2.
9. $\vdash A^*$ — 1, предл. 4.
10. A^* — 9, $\vdash$у.
11. $н\neg A \vdash A^*$ — 1,2,9,10, $\vdash$в.
12. $н\neg A \vdash \neg A^*$ — 1 – 8, $\vdash$в.
13. $\vdash \neg н\neg A$ — 11, 12, ¬в.

Следствие. $\vdash \neg A \Rightarrow \vdash \neg нA$.

С учетом предложения 6 и его следствия получается, что *логически общезначимые и противоречивые формулы являются абсолютно определенными*. Но так и должно быть! Какая неопределенность может возникать в отношении такого рода формул?

И снова результат предложения 6 можно распространить на дублированные расширения.

Предложение 7. Если T дублированное расширение минимальной теории с неопределенностью Tн и $T \vdash A$, то как A, так и $\neg A$ являются абсолютно определенными в теории T:

$T \vdash A \Rightarrow T \vdash \neg нA$ и $T \vdash \neg н\neg A$.

Доказательство повторяет с очевидными модификациями доказательство предложения 6.

Рассмотрим понятие равенства. Как известно, исчисление предикатов с равенством первого порядка получается добавлением к чистому исчислению предикатов следующих аксиом.

A1 $\forall x(x = x)$

A2 $\forall x_1\forall x_2...\forall x_n\forall y_1\forall y_2...\forall y_n((x_1 = y_1 \ \&\ x_2 = y_2 \ \&\ \ldots \ \&\ x_n = y_n) \rightarrow (A(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow A(y_1, y_2, ..., y_n))$

Соблюдая принцип дублирования, получаем еще одну пару аксиом.

A1* $\forall x(x =^* x)$

A2* $\forall x_1\forall x_2...\forall x_n\forall y_1\forall y_2...\forall y_n((x_1 =^* y_1 \ \&\ x_2 =^* y_2 \ \&\ \ldots \ \&\ x_n =^* y_n) \rightarrow (A^*(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow A^*(y_1, y_2, ..., y_n))$

Пусть $ИП_=$ есть исчисление предикатов с равенством. Положим $Tн_= = ИП_= \cup ИП_=^* \cup \{нA \leftrightarrow ((A \ \&\ \neg A^*) \vee (\neg A \ \&\ A^*))\}$. Любопытным представляется следующий факт.

Предложение 8. Понятие равенства является абсолютно определенным в теории $Tн_=$, т.е. $Tн_= \vdash \neg н(x = y)$.

Приведем (опять пропуская очевидные шаги) формальное доказательство сделанного утверждения.

1. $н(x = y)$ доп.
2. $н(x = y) \leftrightarrow ((x = y \ \&\ x \neq^* y) \vee (x \neq y \ \&\ x =^* y))$ (н).
3. $((x = y \ \&\ x \neq^* y) \vee (x \neq y \ \&\ x =^* y))$ 1, 2, лог. выск.
4. $(x = y \ \&\ x \neq^* y)$ доп.
5. $x = y$ 4, &у1.
6. $x \neq^* y$ 4, &у2.
7. $x = y \rightarrow (x =^* x \rightarrow x =^* y)$ A2 (здесь в качестве A взята схема формул $x =^* t$).
8. $(x =^* x \rightarrow x =^* y)$ 5, 7, $\rightarrow$у.
9. $x =^* x$ из A1*.
10. $x =^* y$ 9, 8, $\rightarrow$у.
11. $н(x = y), (x = y \ \&\ x \neq^* y) \vdash x \neq^* y$ 1 - 6, $\vdash$в.

12. н$(x = y)$, $(x = y \ \& \ x \neq^* y)$ $\vdash x =^* y$ 1 - 10, $\vdash$в.
13. н$(x = y)$ $\vdash \neg(x = y \ \& \ x \neq^* y)$ 11, 12, $\neg$в.
14. $(x \neq y \ \& \ x =^* y)$ доп.
15. $x \neq y$ 14, &у1.
16. $x =^* y$ 14, &у2.
17. $x =^* y \to (x = x \to x = y)$ A2* (здесь в качестве A вновь взята схема формул $x =^* t$, так что A* из аксиомы A2* есть $x = t$ в силу совпадения A и A** по предложению 1).
18. $(x = x \to x = y)$ 16, 17, $\to$у.
19. $x = x$ A1.
20. $x = y$ 19, 18, $\to$у.
21. н$(x = y)$, $(x \neq y \ \& \ x =^* y)$ $\vdash x \neq y$ 1-3,14-16, $\vdash$в.
22. н$(x = y)$, $(x \neq y \ \& \ x =^* y)$ $\vdash x = y$ 1-3,14-20, $\vdash$в.
23. н$(x = y)$ $\vdash \neg(x \neq y \ \& \ x =^* y)$ 21, 22, $\neg$в.
24. н$(x = y)$ $\vdash \neg(x = y \ \& \ x \neq^* y) \ \& \ \neg(x \neq y \ \& \ x =^* y)$ 13, 23, лог. выск.
25. н$(x = y)$ $\vdash \neg((x = y \ \& \ x \neq^* y) \vee (x \neq y \ \& \ x =^* y))$ 24, лог. выск.
26. н$(x = y)$ $\vdash \neg$ н$(x = y)$ 25, (н).
27. н$(x = y)$ $\vdash$ н$(x = y)$ лог. выск.
28. $\vdash \neg$н$(x = y)$ 27, 26, $\neg$в.

Аналогично доказывается утверждение Tн$_=$ $\vdash \neg$н$(x =^* y)$, так что все равно, о каком равенстве (= или =*) идет речь – в любом случае понятие равенства остается абсолютно определенным.

Разумеется, не любое понятие будет абсолютно определенным. Например, в теории множеств ZFн = ZF $\cup$ ZF* $\cup$ {н} не удастся доказать $\vdash \neg$н$(x \in y)$, так что понятие принадлежности не является абсолютно определенным. В частности, аксиома существования пустого множества $\exists x \forall y (y \notin x)$ будет продублирована аксиомой $\exists x \forall y (y \notin^* x)$. Обычным образом можно доказать, что пустое множество единственно, но единственность будет относиться к предикату $\in$ и к предикату $\in^*$ *по отдельности*. Намереваясь ввести индивидную константу $\varnothing$, обозначающую пустое множество, мы не обязаны считать это множество определенным. Ничто не мешает принять аксиому н$\forall x(x \notin \varnothing)$. По предложению 3 отсюда моментально последует ZFн $\cup$ { н$\forall x(x \notin \varnothing)$} $\vdash$ н$\forall x(x \notin^* \varnothing)$, так что принцип дублирования будет выполнен автоматически. Поскольку н$\forall x(x \notin \varnothing) \leftrightarrow ((\forall x(x \notin \varnothing) \ \& \ \neg\forall x(x \notin^* \varnothing)) \vee (\neg\forall x(x \notin \varnothing) \ \& \ \forall x(x \notin^* \varnothing))$, либо в смысле отношения $\in$, либо в смысле отношения $\in^*$ (но не того и другого вместе) множество $\varnothing$ окажется непустым.

Помимо рассмотренной выше абсолютной определенности существует и другая разновидность определенности. Некоторые формулы могут быть проинтерпретированы лишь единственным образом. Например, формула $\forall x P(x)$ в каждом непустом универсуме U должна получить интерпретацию $J(P) = U$, чтобы быть истинной, тогда как формула $\exists x P(x)$ в более чем одноэлементном универсуме может быть истинной при разных интерпретациях.

Эти соображения приводят к следующему определению. Назовем формулу A языка L классического исчисления предикатов первого порядка *абсолютно категоричной*, если A имеет модель и для любых двух структур $M_1 = <U, J_1>$, $M_2 = <U, J_2>$ языка L из условия $M_1 \neq M_2$ следует, что либо A истинна в точности в одной из структур M_1 или M_2, либо A ложна и в M_1, и в M_2. Можно выразиться короче (но менее точно), сказав, что во-первых, абсолютно категоричные формулы выполнимы и, во-вторых, в каждом универсуме они имеют не более одной интерпретации. Примерами абсолютно категоричных формул будут следующие предложения: $\forall x P(x)$, $\neg\exists x P(x)$, $\forall x \forall y \neg R(x, y)$, $\forall x \forall y(x = y)\ \&\ \forall x P(x)$. Первые три формулы имеют единственные обеспечивающие их истинность интерпретации в каждом универсуме, а последняя формула единственным способом выполнима только в одноэлементном универсуме.

Пусть язык L классического исчисления предикатов первого порядка содержит двухместную предикатную константу R и не содержит никаких других предикатных, функциональных или индивидных констант.

Предложение 9. Множество W абсолютно категоричных замкнутых формул языка L неразрешимо.

Рассмотрим множество $W' = \{A \mid A \in W$ и A имеет вид $(\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B)\}$. Любая формула вида $(\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B)$ принадлежит W' тогда и только тогда, когда либо B истинна если и только если $\forall x \forall y \neg R(x, y)$ истинна, либо $B \in \Pi$, где Π – множество замкнутых противоречивых формул языка L. Действительно, если ни один из этих двух случаев не имеет места, то $B \notin \Pi$ и, следовательно, класс моделей предложения B не пуст. Более того, существует модель M, в которой формула B истинна, а формула $\forall x \forall y \neg R(x, y)$ ложна. Иначе выполнялась бы метаимпликация $M \models B \Rightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y)$. Но формула $\forall x \forall y \neg R(x, y)$ ложна в любой структуре $M' = <U, J'>$, где $J'(R) = \varnothing$, откуда получилось бы, что B ложна в таких M'. Следовательно, всякий раз, когда структура $<U, J>$ является моделью B, имеем $J(R) = \varnothing$. Это означает, что для любой структуры M ($M \models B \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y)$) противоречит предположени. Итак, существует структура $M = <U, J>$ такая, что $M \models B$ и неверно $M \models \forall x \forall y \neg R(x, y)$. Ясно, что $J(R) \neq$

$\varnothing$. Пусть $J'(R) = \varnothing$. Тогда $M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B$, $M' \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B$, где $M' = <U, J'>$, т.е. $\forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B \notin W'$.

Пусть теперь для любой структуры M языка L выполнено условие $M \models B \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y)$. Очевидно, что для каждой структуры M ($M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B$). Поскольку $\forall x \forall y \neg R(x, y)$ принадлежит W, эквивалентная ей формула $\forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B$ также принадлежит W. В случае $B \in П$ вновь для всякой структуры M языка L имеем $M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \Leftrightarrow M \models \forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B$, откуда $\forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B \in W$.

Допустим, что W′ разрешимо. Всякий раз, когда применение разрешающей процедуры к произвольной замкнутой формуле языка L вида $\forall x \forall y \neg R(x, y) \lor B$ дает утвердительный ответ о принадлежности данной формулы множеству W′, будем рассматривать предложение B. Согласно только что полученному результату, либо B эквивалентно формуле $\forall x \forall y \neg R(x, y)$, либо $B \in П$. Мы можем эффективно установить, какой именно из этих двух возможных вариантов реализован. Поступим следующим образом. Сотрем в формуле B все канторы и каждой атомарной подформуле формулы B вида R(x, y) присвоим истинностное значение 0 («ложь»). Так как других атомарных подформул в формуле B нет, эффективно вычислимо значение получившейся формулы B′ по правилам классической логики высказываний. Если значение B′ окажется равным 1 («истина»), то B имеет модель и, тем самым, B эквивалентна $\forall x \forall y \neg R(x, y)$. Если же истинностное значение B′ равно 0, то $B \in П$. Чтобы убедиться в сказанном, осталось получить следующий результат.

Для любой формулы A и структуры $M = <U, J>$ языка L, в которой $J(R) = \varnothing$, A′ (здесь A′ получается из A посредством описанного на примере предложения B преобразования) принимает значение 1 в том и только в том случае, когда $M \models A$.

Докажем это утверждение индукцией по длине формулы A. Если A – атомарная формула $R(x_i, y_j)$, то A совпадает с A′. По определению, значение $R(x_i, y_j)$ равно 0. Поскольку $J(R) = \varnothing$, при любой оценке свободных переменных x_i и y_j формула $R(x_i, y_j)$ не выполнена в M. Отсюда $R(x_i, y_j)$ ложна в M, т.е. неверно, что $M \models R(x_i, y_j)$.

Разбор вариантов с пропозициональными связками очевиден, поэтому сразу перейдем к случаю совпадения A с формулой вида $\forall x C(x)$. По предположению индукции, $C(x)'$ имеет значение $1 \Leftrightarrow M \models C(x)$. Допустим, значение $C(x)'$ равно 1. Тогда значение $\forall x C(x)'$ также равно 1, поскольку $\forall x C(x)'$ совпадает с формулой $C(x)'$. Так как $M \models C(x)$, будет выполнено $M \models \forall x C(x)$. Пусть теперь $M \models C(x)$. Снова получаем $M \models \forall x C(x)$. Но $\forall x C(x)'$ совпадает с формулой $C(x)'$, откуда значение $\forall x C(x)'$ оказывается равным 1.

Таким образом, если имеется разрешающая процедура для W', по каждой формуле $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B \in W'$ можно эффективно определить, выполнено $B \in \Pi$ или $B \notin \Pi$. А так как для всякого предложения $B \in \Pi$ существует формула $\forall x \forall y \neg R(x, y) \vee B \in W'$, множество Π оказывается разрешимым, что в силу известного результата о нерекурсивности Π и тезиса Черча ведет к противоречию. Следовательно, W' неразрешимо. Очевидным образом, если W разрешимо, то и W' разрешимо. Из этого факта и неразрешимости W' вытекает неразрешимость W.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анисов А.М.* Логика неопределенности и неопределенности во времени // Логические исследования. Вып. 9. М., 2002.
2. *Анисов А.М.* Неопределенности в классической логике // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002.
3. *Анисов А.М.* Современная логика. М.: ИФ РАН, 2002.